Rate of convergence in first passage percolation with low moment conditions (Symposium on Probability Theory)

久保田, 直樹

数理解析研究所講究録
第1903巻 2014年 97-101

Rate of convergence in first passage percolation with low moment conditions

日本大学理工学部　久保田　直樹 *
Naoki Kubota
College of Science and Technology,
Nihon University

Abstract

本稿では，2013年12月17日から20日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに，ファーストパッセージパーコレーションにおける asymptotic shape の漸近挙動について，その概要を述べる．また，本研究を応用し，ファーストパッセージパーコレーションの分散の下からの評価に対する考察を行う．

1 Model and main results

本稿では，2013年12月17日から20日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに，著者が行った「弱いモーメント条件の下でのファーストパッセージパーコレーションの研究」についての概要を述べる．定理などの証明は概略程度に留めるため，詳細については [6]，または関連する研究である [2]，[5] や [7] を参照されたい．

樹木が正方格子状に並んだ果樹園において，ある木で病気が発症したとする．病気の伝染は隣接する4本の木にのみ起こり，その確率は独立に p ずつであるとする．このとき，「ある木で発症した病気が，果樹園の樹木にどのように伝染していくか」を問題として扱うのが，パーコレーションである．これに関連して，Hammersley と Welsh [4] によって導入された“ファーストパッセージパーコレーション”がある．ファーストパッセージパーコレーションでは，ある木 a からそれに隣接する木 b には，ランダムな時間 $\omega(\{a,b\})$ で病気が伝染するとし，「ある範囲まで病気が広がる時間と，その感染経路」を問題として

* E-mail address: kubota@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

扱う．今回，このファーストパッセージパーコレーションに対し，病気の伝染が起こる範囲の形状の振る舞いについて研究を行った．

まず最初に，今回扱うファーストパッセージパーコレーションについて，より詳しく説明を行う．$\mathcal{E}$ を正方格子 $\mathbb{Z}^d$ の辺集合とし，$(\omega(e))_{e\in\mathcal{E}}$ を独立同分布な非負値確率変数列であるとする．(各 $\omega(e)$ を，木から木へ病気が伝染するときのランダムな時間とみなす．) このとき，$\mathbb{Z}^d$ の辺を「$e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_l$」と辿る経路 π において，その *passage time* を

$$T(\pi) := \sum_{i=1}^{l} \omega(e_1)$$

で定義する．さらに，$\mathbb{Z}^d$ の頂点 x から y への *first passage time* を以下で定義する:

$$T(x,y) := \inf\{T(\pi); \pi \text{ は } \mathbb{Z}^d \text{ の頂点 } x \text{ から } y \text{ への経路}\}$$

ここで問題とするのは，原点 0 からの first passage time が t 以下となるような点の集合

$$B(t) := \left\{y + h; y \in \mathbb{Z}^d,\ T(0,y) \le t,\ h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d\right\}, \qquad t > 0$$

の漸近挙動である．

ここで，次の仮定 (A1) と (A2) を導入する: $F(x)$ を $(\omega(e))_{e\in\mathcal{E}}$ の共通の分布関数とする．このとき，$\mathbb{Z}^d$ 上のボンドパーコレーションの臨界確率 p_c と，ある $\alpha > 1$ に対して

(A1) $F(0) < p_c$,
(A2) $\int_0^\infty x^\alpha \, dF(x) < \infty$.

仮定 (A2) の下では，次が成り立つことが知られている: ある関数 $\mu : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ が存在して，P-a.s. と L^1 の意味で

$$\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T(0,nx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E[T(0,nx)] = \inf_{n\ge 1} \frac{1}{n} E[T(0,nx)], \qquad x \in \mathbb{Z}^d.$$

この関数 μ を time constant と呼ぶ．さらに，仮定 (A1) と (A2) の下で，すべての $\epsilon > 0$ に対して確率 1 で次が成立する: 十分大きな $t > 0$ に対して，

$$(1-\epsilon)B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1+\epsilon)B_0.$$

ここで，$B_0 := \{x \in \mathbb{R}^d; \mu(x) \le 1\}$ で，これを limit shape と呼ぶ．この結果に対し，Kesten [5] と Alexander [1] は，$B(t)/t$ が B_0 へ漸近していく rate をより精密に調べ，最大でも $\epsilon = O(t^{-1/2}\log t)$ 程度となることを示した．そこでは，上の仮定 (A2) よりかなり強い，以下の条件が仮定されている:

ある $\gamma > 0$ に対して，$\int_0^\infty e^{\gamma x}\, dF(x) < \infty$ が成立する．

今回，この条件を弱めた場合の漸近挙動について考察し，以下の結果を得た．

Theorem 1.1. 仮定 (A1) と (A2) を仮定する．このとき，ある定数 C が存在して，すべての ℓ_2-unit vector $\xi \in \mathbb{R}^d$ と十分大きな n に対して，

$$E[T(0,[n\xi])] \le n\mu(\xi) + Cn^{1-1/(6d+12)}(\log n)^{1/3}.$$

が成立する．ここで，$[n\xi]$ は点 $n\xi$ に最も近い格子点である．

Theorem 1.2. 仮定 (A1) が成立するとする．さらに，ある $\alpha \ge d$ に対して，仮定 (A2) が成立するとする．このとき，$\delta > 0$ が十分小さければ，ある定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ が存在し，十分大きな t に対して次が成立する:

$$P\Big(B(t) \not\subset t\left(1 + C_1 t^{-1/2+3\delta}\right) B_0\Big) \le C_2 t^d \exp\{-C_3 t^\delta\},$$
$$P\Big(t\Big\{1 - C_4 t^{-1/(6d+12)}(\log t)^{1/3}\Big\} B_0 \not\subset B(t)\Big) \le t^{\alpha(\beta-1)+d}.$$

ここで，

$$\beta := \left(3 - d\delta - \frac{1}{6d+12}\right)^{-1}.$$

特に，ある $\alpha \ge (d+1)(9d+17)/(6d+11)$ に対して仮定 (A2) が満たされるならば，確率 1 で次が成立する: 十分大きな t に対して，

$$\Big\{1 - C_4 t^{-1/(6d+12)}(\log t)^{1/3}\Big\} B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset \Big\{1 + C_1 t^{-1/2+(d+1)\delta}\Big\} B_0.$$

2 Application of Theorem 1.1

この章では，Theorem 1.1 を応用し，first passage time の分散の lower bound の考察を行う．次元は $d = 2$ とし，確率測度 ν' の台を $\mathrm{supp}(\nu')$ で表わすことにする．さらに，$\vec{p}_c$ を $\mathbb{Z}^2$ 上の oriented percolation についての critical parameter とする (詳しくは，[3] を参照)．このとき，$q \ge \vec{p}_c$ に対して，$\mathcal{M}_q$ を次の条件 (B1) と (B2) を満たす確率測度 ν' の集まりとする:

(B1) $\mathrm{supp}(\nu') \subset [1,\infty)$,

(B2) $\nu'(\{1\}) = q$.

また，原点 0 とベクトル $N_q := (1/2+\alpha_q/\sqrt{2}, 1/2-\alpha_q/\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ を結ぶ直線と x-軸のなす角を θ_q とする．ここで，α_q は oriented percolation に対する asymptotic speed である (詳しくは，[3] を参照)．このとき，Auffinger と Damron [2] は次が成立することを証明した．

Theorem 2.1 (Auffinger and Damron, Theorem 2.5 of [2])**.** 与えられた $q \in [\vec{p}_c, 1)$ に対して，$\nu \in \mathcal{M}_q$，$\theta \in [0, \theta_q)$ とする．(A2) が $\alpha = 2$ として成立し，さらにある $\beta < 1$ が存在して，十分大きな n に対して

$$E[T(0, [n\xi_\theta])] < n\mu(\xi_\theta) + n^\beta, \tag{2.1}$$

が成り立つと仮定する．ここで，$\xi_\theta := (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ である．このとき，ある正の定数 $C = C(\theta)$ が存在して，すべての n に対して

$$\mathrm{Var}(T(0, [n\xi_\theta])) \geq C \log n \tag{2.2}$$

が成立する．

この定理の仮定に Theorem 1.1 を適用する．まず，$\nu \in \mathcal{M}_q$ (特に，(B1) が成り立つ) ならば，$\nu(\{0\}) = 0 < p_c$ であることに注意する．つまり，仮定 (A1) が満たされている．そこで，もし $\alpha = 2$ として (A2) が成立するならば，Theorem 1.1 より $\beta = 47/48$ として (2.1) が成り立つことが分かる．Auffinger と Damron は，first passage time の分散の lower bound を得るために (2.1) を仮定したが，実際は仮定 (A2) のみで同様の評価が得られることが分かった．すなわち，次の系が得られる．

Corollary 2.2. 与えられた $q \in [\vec{p}_c, 1)$ に対して，$\nu \in \mathcal{M}_q$，$\theta \in [0, \theta_q)$ とする．もし $\alpha = 2$ として (A2) が成立するならば，すべての n に対して (2.2) が成立する．

References

[1] K. S. Alexander. Approximation of subadditive functions and convergence rates in limiting-shape results. *The Annals of Probability*, 25(1):30–55, 1997.

[2] A. Auffinger and M. Damron. Differentiability at the edge of the percolation cone and related results in first-passage percolation. *Probability Theory and Related Fields*, pp. 1–35, 2011.

[3] R. Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 12(4):999–1040, 1984.

[4] J. Hammersley and D. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*, pp. 61–110. Springer, 1965.

[5] H. Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, pp. 296–338, 1993.

[6] N. Kubota. Rate of convergence in first passage percolation with low moment conditions. *Preprint*, 2013. `http://arxiv.org/abs/1306.5917`.

[7] Y. Zhang. On the concentration and the convergence rate with a moment condition in first passage percolation. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(7):1317–1341, 2010.